

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 8.02.2025
Clasa a IX-a

1. (7p) Arătați că: $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ se divide cu 7 pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

2. (7p) Arătați că nu există $x > 0$ astfel încât $[nx]$ să fie număr impar pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. (S-a notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a)

3. (7p) Dacă $a, b, c > 0$, $a + b + c = 1$, arătați că:

$$\frac{1+a}{1-a} \cdot \frac{1+b}{1-b} \cdot \frac{1+c}{1-c} \geq 8$$

4. Fie triunghiul echilateral ABC și $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$ astfel încât $\frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{C'B}$. Notăm intersecțiile perechilor de drepte (AA', BB') , (BB', CC') , (CC', AA') cu C'', A'', B'' .

a) (4p) Arătați că $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

b) (3p) Arătați că centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și $A''B''C''$ coincid.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.